大学数学のアトリエ｜集合論　第 4 章　順序集合

No.1　順序関係

この回のゴール

- 二項関係について，反射律・対称律・反対称律・推移律を判定できる．
- 同値関係から同値類・商集合を作り，同値類が集合を「分割」することを説明できる．
- 半順序と全順序を区別し，ハッセ図をかける．
- 最大元と極大元，上界と上限を区別できる．整列集合の定義を述べられる．

■ 1. 二項関係

「$=$」「$\leq$」「$\subset$」「割り切る」「合同」など，数学には 2 つのものの「関係」がたくさん出てくる．これらを集合の言葉で統一的に扱おう．

定義 1　二項関係

集合 A に対して，直積 $A \times A$ の部分集合 R を A 上の**二項関係**（または単に関係）という．$(a, b) \in R$ のとき $a\,R\,b$ と書き，「a と b は関係 R にある」という．

関係を「部分集合」として定義するのは，写像をグラフ（$A \times B$ の部分集合）で定義したのと同じ考え方である（第 2 章 No.1）．たとえば $\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ は，座標平面の部分集合 $\{(x, y) \mid x \leq y\}$（直線 $y = x$ とその上側）である．

定義 2　関係の性質

集合 A 上の関係 R について，次の性質を考える．

- **反射律**：すべての $a \in A$ で $a\,R\,a$.
- **対称律**：$a\,R\,b$ ならば $b\,R\,a$.
- **反対称律**：$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ ならば $a = b$.
- **推移律**：$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ ならば $a\,R\,c$.

例 1

次の表で，○は成り立つ，× は成り立たないことを表す．

関係	反射律	対称律	反対称律	推移律
$\mathbb{R}$ 上の $=$	○	○	○	○
$\mathbb{R}$ 上の $\leq$	○	×	○	○
$\mathbb{R}$ 上の $<$	×	×	○	○
$\mathbb{N}$ 上の $a \mid b$ (a が b を割り切る)	○	×	○	○
$\mathcal{P}(X)$ 上の $\subset$	○	×	○	○
$\mathbb{Z}$ 上の $a \equiv b \pmod 3$	○	○	×	○
$\mathbb{R}$ 上の $\lvert x-y\rvert \leq 1$	○	○	×	×

$<$ の反対称律は，「$a<b$ かつ $b<a$」となる a, b がないので，仮定をみたすものがなく成り立つ（第 1 章 No.2 の空集合の上の「すべて」と同じ考え方）．$|x-y| \leq 1$ の推移律は，$|0-1| \leq 1$, $|1-2| \leq 1$ だが $|0-2|>1$ なので成り立たない．

■ 2. 同値関係と商集合

定義 3　同値関係・同値類・商集合

反射律・対称律・推移律をみたす関係を**同値関係**といい，$a \sim b$ のように書く．$a \in A$ に対して，a と同値な要素全体の集合

$$[a] = \{\, x \in A \mid x \sim a \,\}$$

を a の**同値類**といい，a をその**代表元**という．同値類全体の集合 $A/\!\sim = \{\, [a] \mid a \in A \,\}$ を**商集合**という．

定理 1

$\sim$ を集合 A 上の同値関係とする．

(1) $a \in [a]$．（どの要素も，どれかの同値類に属する．）

(2) $a \sim b \iff [a]=[b]$.

(3) $[a] \neq [b]$ ならば $[a] \cap [b] = \varnothing$.

つまり，A は互いに交わらない同値類に分割される．

【証明】(1) 反射律より $a \sim a$.

(2) ($\Rightarrow$) $x \in [a]$ とすると $x \sim a$．$a \sim b$ と推移律より $x \sim b$，つまり $x \in [b]$．よって $[a] \subset [b]$．対称律より $b \sim a$ でもあるので，同様に $[b] \subset [a]$．($\Leftarrow$) (1) より $a \in [a]=[b]$ なので $a \sim b$.

(3) 対偶を示す．$x \in [a] \cap [b]$ とすると $x \sim a$，$x \sim b$．対称律と推移律より $a \sim b$ なので，(2) より $[a]=[b]$. □

例 2

(1) $\mathbb{Z}$ 上の $a \equiv b \pmod 3$ の同値類は，3 で割った余りで分けた 3 つの集合

$$[0] = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \quad [1] = \{\dots, -2, 1, 4, \dots\}, \quad [2] = \{\dots, -1, 2, 5, \dots\}$$

で，商集合は $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2]\}$．$[3] = [0]$，$[-1] = [2]$ のように，代表元のとり方は 1 通りではない．（合同式は分野「整数論」第 2 章 No.1 で詳しく扱う．）

(2) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上で，$(m, n) \sim (m', n') \iff mn' = m'n$ と定めると同値関係になる．(m, n) を分数 $\frac{m}{n}$ と思えば，$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ のように「値が等しい分数」を同じとみなす関係である．有理数とは，この同値類のことだと考えられる．

商集合の上の写像

商集合の上で写像を定めるときは，代表元の選び方によらないこと（well-defined であること）を確かめる必要がある．第 2 章 No.1 練習問題 1 (3) の $f\left(\frac{m}{n}\right) = m$ が写像にならなかったのは，同じ同値類の別の代表元 $(1, 2)$，$(2, 4)$ で値が変わってしまうからである．一方，$[(m, n)] \mapsto \dfrac{m^2}{n^2}$ は，$mn' = m'n$ なら $m^2n'^2 = m'^2n^2$ となって値が代表元によらないので，写像として定まる．

■ 3. 順序関係

定義 4　半順序・全順序

反射律・反対称律・推移律をみたす関係を**半順序**（または順序）といい，$a \leq b$ のように書く．半順序 $\leq$ が定められた集合 $(A, \leq)$ を**順序集合**（半順序集合）という．さらに，任意の $a, b \in A$ について $a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立つ（どの 2 つも**比較可能**）とき，$\leq$ を**全順序**といい，$(A, \leq)$ を**全順序集合**という．

$a \leq b$ かつ $a \neq b$ のとき $a < b$ と書く．数の大小と区別するため，一般の順序を $\preceq$ と書く本もある．

例 3

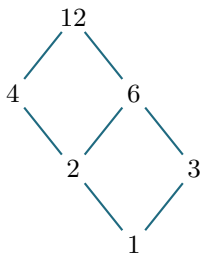
(1) $(\mathbb{R}, \leq)$，$(\mathbb{N}, \leq)$ は全順序集合．

(2) $(\mathbb{N}, |)$（割り切る関係）は半順序集合だが全順序ではない．2 と 3 はどちらも他方を割り切らず，比較できない．

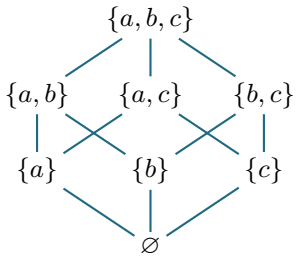
(3) $(\mathcal{P}(X), \subset)$ は半順序集合．X が 2 個以上の要素をもてば全順序ではない（$\{a\}$ と $\{b\}$ は比較できない）．

(4) $\mathbb{R}^2$ 上で，$(x, y) \leq (x', y') \iff$「$x < x'$」または「$x = x'$ かつ $y \leq y'$」と定めると全順序になる．これを**辞書式順序**という（辞書で 1 文字目から順に比べるのと同じ）．

有限の順序集合は，**ハッセ図**で表すと分かりやすい．$a < b$ で，間に $a < c < b$ となる c がないとき，b を a の上に書いて線で結ぶ．上に向かってたどれる 2 点が「$\leq$ の関係にある」2 点である．



(a) 12 の約数，$|$



(b) $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$，$\subset$

(a) では $2 \mid 12$（2 から 4 や 6 を経て 12 へ上に行ける）だが，4 と 6 は比較できない．(a) で 1 と 4 を直接結ばないのは，間に 2 があるからである．

■ 4. 最大元・極大元・上限

定義 5　最大元・極大元

順序集合 $(A, \leq)$ の部分集合 S と $m \in S$ について，

- すべての $s \in S$ で $s \leq m$ のとき，m を S の**最大元**といい，$\max S$ と書く．
- $m < s$ となる $s \in S$ が存在しないとき，m を S の**極大元**という．

不等号を逆にして，**最小元** $\min S$，**極小元**を定める．

最大元は「**すべて**より上」，極大元は「**それより上がない**」である．比較できない要素があると，両者は違ってくる．

定理 2

順序集合 $(A, \leq)$ の部分集合 S について，

(1) S の最大元は，存在すればただ 1 つである．

(2) S の最大元は極大元である．さらに最大元が存在すれば，極大元はそれだけである．

(3) $\leq$ が全順序ならば，極大元は最大元である．

【証明】 (1) m，m' がともに最大元なら，$m' \leq m$ かつ $m \leq m'$．反対称律より $m = m'$．

(2) 最大元 m について $m < s$（$s \in S$）とすると，$s \leq m$ と反対称律から $s = m$ となり矛盾．よって m は極大元．また m' を極大元とすると $m' \leq m$ で，$m' < m$ ではないので $m' = m$．

(3) 極大元 m と任意の $s \in S$ について，全順序なので $s \leq m$ または $m \leq s$．後者で $m \neq s$ なら $m < s$ となり極大性に反するので，いずれにしても $s \leq m$．　□

定義 6　上界・上限

順序集合 $(A, \leq)$ の部分集合 S について，

- すべての $s \in S$ で $s \leq u$ となる $u \in A$ を，S の**上界**という．上界が存在するとき，S は**上に有界**であるという．
- S の上界全体に最小元があるとき，それを S の**上限**（最小上界）といい，$\sup S$ と書く．

同様に**下界**，**下限** $\inf S$（最大下界）を定める．

上界は S の外（A の中）にあってもよい．最大元は S の中になければならない．S に最大元があれば，

それが上限である．

例題 1

$(\mathbb{N}, |)$ の部分集合 $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ を，$|$ による順序集合と考える．

(1) A の極大元，極小元，最大元，最小元を求めよ．

(2) A の部分集合 $\{4, 6\}$，$\{2, 3\}$，$\{8, 12\}$ について，A の中での上界と上限を求めよ．

【解答】 (1) 8 と 12 には，それより真に大きい（8，12 の倍数で自分自身と異なる）A の要素がないので極大元．2 と 3 には，それより真に小さい（2，3 の約数で自分自身と異なる）A の要素がないので極小元．4 と 6 は $4 \mid 8$，$6 \mid 12$ なので極大元でなく，4，6，8，12 は 2 で割り切れるので極小元でない．極大元が 2 つあるので最大元はなく，極小元が 2 つあるので最小元もない（定理 2 (2)）．

(2) $\{4, 6\}$ の上界は「4 と 6 の公倍数で A に属するもの」なので 12 だけで，上限は 12．$\{2, 3\}$ の上界は 6，12 で，その最小元は 6（$6 \mid 12$）なので，上限は 6．$\{8, 12\}$ の公倍数は 24 の倍数で，A には属さないので，上界はなく，上限もない．（$(\mathbb{N}, |)$ 全体で考えれば，$\sup\{a, b\}$ は最小公倍数，$\inf\{a, b\}$ は最大公約数である．）

例 4

$(\mathbb{Q}, \leq)$ で $S = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x^2 < 2 \right\}$ を考える．1.5 や 2 は上界である．一方，$\sqrt{2}$ は有理数でないので，$(\mathbb{Q}, \leq)$ における上界ではない（上界は順序集合 $\mathbb{Q}$ の要素でなければならない）．上界全体は $\sqrt{2}$ より大きい有理数全体であり，その中に最小元は存在しない（どんな上界 u に対しても，$\sqrt{2} < u' < u$ となる有理数 u' がとれる）．よって $(\mathbb{Q}, \leq)$ では S の上限は存在しない．$(\mathbb{R}, \leq)$ で考えれば $\sup S = \sqrt{2}$ である．「上に有界な空でない部分集合には必ず上限がある」ことが実数の連続性で，分野「解析学」第 1 章 No.2 の主題である．

■ 5. 整列集合

定義 7　整列集合

全順序集合 $(A, \leq)$ で，**空でないどんな部分集合にも最小元がある**ものを**整列集合**という．

例 5

(1) $(\mathbb{N}, \leq)$ は整列集合である（$\mathbb{N}$ の**整列性**）．第 3 章 No.1 定理 3 の証明で使った性質で，数学的帰納法の根拠でもある．

(2) $(\mathbb{Z}, \leq)$ は整列集合でない（$\mathbb{Z}$ 自身に最小元がない）．

(3) $([0, 1], \leq)$ は全体の最小元 0 をもつが，整列集合でない．部分集合 $(0, 1]$ に最小元がない．

$\mathbb{R}$ には，ふつうの $\leq$ とは別の全順序を入れて，整列集合にすることができるだろうか．実は「**どんな集合にも，整列集合になるような全順序を入れられる**」（整列可能定理）．しかし，$\mathbb{R}$ に対してそのような順序を具体的に書き下した人はいない．この不思議な定理は No.3 で選択公理とともに扱う．

コラム：同値関係は「同一視」の道具

同値関係と商集合は，「違うものを同じとみなす」ための道具である．例 2 (2) で分数から有理数を作ったように，大学数学では多くの対象がこの方法で作られる．

- 群を正規部分群で「割った」商群（分野「代数学」第 3 章 No.2）
- 整数を余りで同一視した $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$（分野「整数論」第 2 章 No.1，分野「代数学」第 5 章 No.3）
- 正方形の向かい合う辺を同一視して作るトーラス（ドーナツの表面）

「同値類」という言葉に出会ったら，「何と何を同じとみなしているのか」を考えるとよい．

■ 練習問題

1. $A = \{1, 2, 3\}$ 上の次の関係について，反射律・対称律・反対称律・推移律が成り立つかを調べよ．同値関係ならば同値類を，半順序ならばハッセ図を答えよ．

(1) $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

(2) $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3)\}$

(3) $R_3 = \{(1,2), (2,1)\}$

2. $\mathbb{R}$ 上で $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$ と定める．$\sim$ が同値関係であることを示せ．また，各同値類は $[0, 1)$ の要素をちょうど 1 つ含むことを示せ．

3. $(\mathbb{N}, |)$ が半順序集合であることを示せ．また，$\mathbb{Z}$ 上の $|$ は反対称律をみたさないことを示せ．

4. 30 の正の約数全体を $|$ による順序集合と考えて，ハッセ図をかけ．また，それが $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ のハッセ図と同じ形になる理由を説明せよ．

5. $(\mathbb{N}, |)$ の部分集合 $S = \{4, 6, 10\}$ について，S の最大元・最小元・極大元・極小元を求めよ．また，$\mathbb{N}$ の中での $\sup S$ と $\inf S$ を求めよ．

6.（考えてみよう）$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に辞書式順序 $(m, n) \le (m', n') \iff$「$m < m'$」または「$m = m'$ かつ $n \le n'$」を入れる．

(a) これは整列集合であることを示せ．

(b) 順序を保つ全単射 $f\colon (\mathbb{N}, \le) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \le)$（$a \le b \iff f(a) \le f(b)$ をみたす全単射）は存在しないことを示せ．

■ 練習問題の解答

1. (1) 反射律○，対称律○，反対称律 ×（$1R_1 2$，$2R_1 1$ だが $1 \neq 2$），推移律○．同値関係で，同値類は $\{1, 2\}$，$\{3\}$．
(2) 反射律○，対称律 ×，反対称律○，推移律○．半順序で，ハッセ図は 1 の上に 2 と 3 が並び，1 – 2，1 – 3 を線で結んだもの（2 と 3 は比較できない）．
(3) 反射律 ×（$(1,1) \notin R_3$），対称律○，反対称律 ×，推移律 ×（$1R_3 2$，$2R_3 1$ だが $(1,1) \notin R_3$）．

2. 反射律：$x - x = 0 \in \mathbb{Z}$．対称律：$x - y \in \mathbb{Z}$ なら $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$．推移律：$x - y,\ y - z \in \mathbb{Z}$ なら $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$．
x の同値類 $[x] = \{\, x + n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ について，$n = -\lfloor x \rfloor$（$\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数）とすると $x + n = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$．また $x + n$，$x + n'$ がともに $[0, 1)$ に入れば，差 $n - n'$ は整数で $|n - n'| < 1$ なので $n = n'$．よってちょうど 1 つ．（商集合 $\mathbb{R}/\sim$ は $[0, 1)$ と 1 対 1 に対応する．0 と 1 を同一視した「円周」と考えることもできる．）

3. 反射律：$a = 1 \cdot a$．推移律：$b = ka$，$c = lb$ なら $c = (kl)a$．反対称律：$a \mid b$，$b \mid a$ なら $b = ka$，$a = lb$（$k, l \in \mathbb{N}$）で，$a = kla$ より $kl = 1$，$k = l = 1$．よって $a = b$．$\mathbb{Z}$ では $2 \mid (-2)$ かつ $(-2) \mid 2$ だが $2 \neq -2$ なので，反対称律をみたさない（$k = l = -1$ がありうる）．

4. 約数は 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30．下から 1；2, 3, 5；6, 10, 15；30 の 4 段に並べ，1 – 2，1 – 3，1 – 5，2 – 6，2 – 10，3 – 6，3 – 15，5 – 10，5 – 15，6 – 30，10 – 30，15 – 30 を結ぶ（立方体の形）．
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ なので，約数 d は「2，3，5 のどれを使うか」で決まり，$d \mapsto \{\, p \in \{2,3,5\} \mid p \mid d \,\}$ は $\{1, \ldots, 30$ の約数$\}$ から $\mathcal{P}(\{2, 3, 5\})$ への全単射である．しかも $d \mid d' \iff$（d の素因数の集合）$\subset$（d' の素因数の集合）なので，順序もそのまま対応する．

5. 4，6，10 のどれも，自分以外の 2 つを割り切らず，自分以外の 2 つで割り切れもしない．つまり，どの要素についても，それより真に大きい要素も真に小さい要素も S にないので，3 つとも極大元かつ極小元．最大元も最小元もない．$\sup S = \mathrm{lcm}(4, 6, 10) = 60$，$\inf S = \gcd(4, 6, 10) = 2$．

6. (a) 全順序であることは定義から確かめられる．$\varnothing \neq T \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ をとる．T の要素の第 1 成分全体は $\mathbb{N}$ の空でない部分集合なので，最小値 m_0 がある（$\mathbb{N}$ の整列性）．第 1 成分が m_0 である T の要素の第 2 成分全体にも最小値 n_0 がある．(m_0, n_0) が T の最小元である．
(b) $(2, 1)$ より小さい要素は $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, … と無限個ある．一方 $(\mathbb{N}, \leq)$ では，どの k についても k より小さい要素は $k - 1$ 個しかない．f が順序を保つ全単射なら，$f(k) = (2, 1)$ となる k より小さい要素は f で $(2, 1)$ より小さい要素に 1 対 1 に写るので，個数が一致しなければならず，矛盾．（集合としては $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$（第 3 章 No.1 定理 2）なのに，「順序の形」としては違う．順序まで込めた「長さ」を表すのが**順序数**である．）